



Maturitätsprüfungen 2008

Grundlagenfach	Mathematik
Abteilungen	G4abcd
Examinatorinnen und Examinatoren	Dieter Koch
	Michael Kalkhi
	Beatrice Müller
	Käthi Schneider Leber

Erlaubte Hilfsmittel:

Formelsammlung: Fundamentum Mathematik und Physik
 Taschenrechner TI-89 oder TI-89 Titanium ohne gespeicherte Programme
 Blatt mit Bedingungen zum Gebrauch des Taschenrechners.

Prüfungsbestimmungen:

Schreiben Sie die Aufgaben mit Kugelschreiber, Füllfeder o.ä.,
 Bleistift ist nur für Graphen und Skizzen zugelassen.
 Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
 Die Lösungen müssen vollständig dokumentiert sein, um die volle
 Punktzahl zu erhalten.
 Programme, die Sie zur Lösung einer Aufgabe selber schreiben,
 müssen in der entsprechenden Aufgabe dokumentiert sein.
 Doppelt gelöste Aufgaben werden gar nicht gewertet.

Notenmassstab:

Es sind insgesamt 87 Punkte erreichbar.

Punkte	0	4	11.5	19	26.5	34	41.5	49	56.5	64	71.5
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	3.5	11	18.5	26	33.5	41	48.5	56	63.5	71	87
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

NKSA – Maturaprüfung 2008 – Mathematik – 20. 5. 2008

Aufgabe 1 *Parallelogramm* 6 Punkte

Es sind die Punkte $A(1|9|-1)$, $B(5|8|10)$ und $D(2|-2|0)$ gegeben.

- (a) Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C so, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist. (Eine Lösung genügt.) (2 P)
- (b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms. (2 P)
- (c) Durch A wird eine Parallele zur Diagonalen BD gelegt. Wo durchstösst diese Parallele die xy -Ebene? (2 P)

Aufgabe 2 *Kugel – Geraden – Tangenten – ...* 19 Punkte

Gegeben sind die Kugel $K : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 10y + 2z + 15 = 0$,

für $a \in \mathbb{R}$ die Geraden $g_a : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$,

sowie die Punkte $A(1|8|8)$, $B(3|6|4)$, $C(7|5|5)$, $D(7|6|4)$ und $E(9|7|13)$.

- (a) Bestimmen Sie a so, dass die Geraden g_a und BC einander schneiden. Geben Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel α an. (5 P)
- (b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden s an, die sowohl CD als auch g_8 senkrecht schneidet. (4 P)
- (c) Eine Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt M_1 auf g_5 soll CD und g_8 als Tangenten haben. Geben Sie Mittelpunkt und Radius dieser Kugel an. (5 P)
- (d) Die Kugel K wird von der Ebene $F : 2x - y - 2z + 4 = 0$ in einem Kreis k geschnitten. Berechnen Sie dessen Mittelpunkt und Radius. (5 P)

Aufgabe 3 *Verteilen* 2 Punkte

Wie viele Möglichkeiten gibt es, fünf verschiedene Gegenstände in neun Fächer zu verteilen, wenn

- (a) dabei auch mehrere Gegenstände in dasselbe Fach kommen dürfen, (1 P)
- (b) in jedes Fach höchstens ein Gegenstand kommen darf? (1 P)

Aufgabe 4 *Würfelspiel* 13 Punkte

Hans schlägt Fritz ein Würfelspiel vor: Fritz darf dreimal würfeln. Kommt jedesmal eine Eins, so endet das Spiel unentschieden; bei genau 2 Einsen soll Fritz 4 Franken bezahlen; bei genau einer Eins erhält Fritz von Hans 7 Franken; kommt gar keine Eins, so muss wiederum Fritz 2 Franken bezahlen.

Hinweis zu (a)-(d): Es handelt sich um einen idealen (guten) Würfel.

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Einsen kommen? (1 P)
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nicht unentschieden ausgeht? (2 P)
- (c) Wie gross ist der erwartete Gewinn von Fritz? (3 P)
- (d) Wie viel sollte Fritz statt der 7 Franken bei genau einer Eins erhalten, damit das Spiel fair wäre? (2 P)
- (e) Fritz hat einen Würfel, bei dem er die Wahrscheinlichkeit einer Eins einstellen kann. Auf welche Wahrscheinlichkeit müsste er den Würfel einstellen, damit sein zu erwartender Gewinn möglichst gross wird? (5 P)

Aufgabe 5*Glücksrad*

9 Punkte

Bei einem Glücksrad sind die Felder mit Buchstaben wie folgt angeschrieben: A, K, A, N, R, I, O, N, M, N.

- (a) Wie oft muss man drehen, damit mit mindestens 99.9%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Vokal kommt? (Vokale: A, E, I, O, U) (3 P)
- (b) Das Glücksrad wird 10 Mal gedreht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- (b1) genau 6 Mal ein „N“ kommt, (2 P)
- (b2) höchstens 2 Mal ein „N“ kommt? (2 P)
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit lässt sich aus den aus vier Drehungen erdrehten Buchstaben der Name „Anna“ schreiben? (2 P)

Aufgabe 6*Ochsen – Hirschen – Löwen*

4 Punkte

Max hat drei Stammkneipen. Einmal pro Woche geht er in den „Ochsen“, zweimal in den „Hirschen“ und dreimal in den „Löwen“. Die Wahrscheinlichkeit, dass er dort seinen Freund Moritz trifft, beträgt im „Ochsen“ 0.5, im „Hirschen“ $1/6$ und im „Löwen“ $1/3$.

Max kommt abends nach Hause und erzählt seiner Frau, er habe eben in der Kneipe Moritz getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er im „Löwen“?

Aufgabe 7*Extremalaufgabe*

7 Punkte

Ein Joghurtbecher hat die Form eines Kreiszyllinders. Er hat 180 cm^3 Inhalt. Mantel- und Grundfläche bestehen aus Plastik, die Deckfläche aus Aluminium. Das Aluminium ist in der Produktion fünfmal teurer als das Plastik, welches a Franken pro cm^2 kostet.

Wie gross sind Zylinderradius und -höhe zu wählen, damit die Materialkosten minimal werden?

Aufgabe 8*Steckbriefaufgaben*

9 Punkte

- (a) Der Graph der ganz-rationalen Funktion (= Polynomfunktion) $f(x)$ ist symmetrisch zur y -Achse, hat eine horizontale Tangente im Punkt $(0|2)$, schneidet die x -Achse bei $x = -2$ unter einem Winkel von 25° . Geben Sie die Bedingungen an, die die Funktion $f(x)$ erfüllen muss (z.B. $f'''(2) = 7, \dots$). Welcher Ansatz / welche Form ist für den Funktionsterm sinnvollerweise zu wählen? Begründen Sie Ihre Antwort! (5 P)
- (b) Bestimmen Sie eine mögliche gebrochen-rationale Funktion, deren Graph ursprungssymmetrisch ist, nur die Nullstelle 0, mindestens die Polstelle -2 und keine horizontale Asymptote hat. (4 P)

Aufgabe 9*Ableitungsregeln*

8 Punkte

Bestimmen Sie jeweils die gesuchte Ableitung ohne Taschenrechner. Geben Sie jeweils zuerst an, welche Ableitungsregel(n) Sie benutzen. Bitte keine Vereinfachungen vornehmen.

(a) $a(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$ $a'(x) = ?$ (2 P)

(b) $b(x) = e^{2x} \cdot \cos x \cdot \sqrt[3]{x^5}$ $b'(x) = ?$ (2 P)

(c) $c(x) = \ln x$ $c^{(30)}(x) = ?$ ($c^{(30)}(x)$ bezeichnet die 30. Ableitung von $c(x)$.) (2 P)

(d) $d(x) = \frac{1}{(e^x + e^{-x})^5}$ $d'(x) = ?$ (2 P)

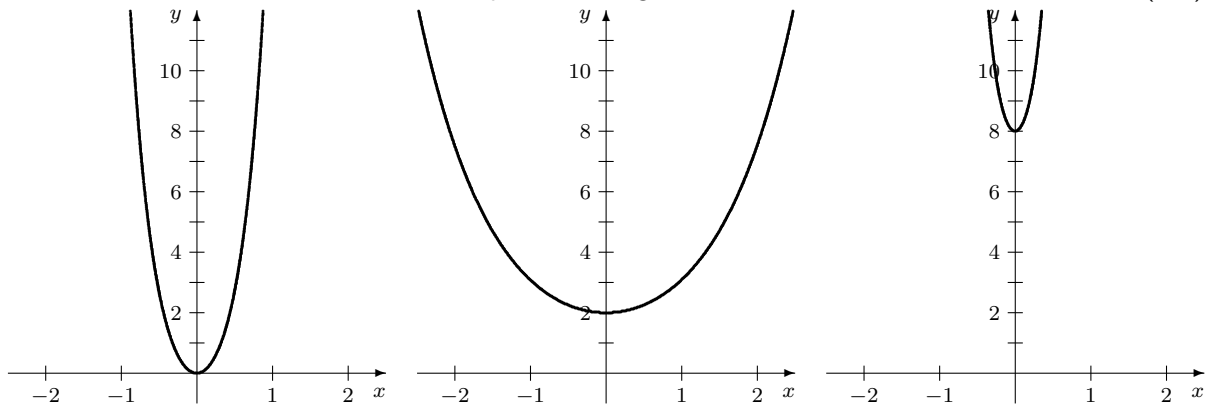
Aufgabe 10*Funktionenschar*

10 Punkte

Betrachten Sie die Graphen der Funktionen $f_k(x) = e^{kx} + e^{-kx} - k + 1$.

- (a) Bestimmen Sie die Werte k , für die die Graphen hier dargestellt sind:

(3 P)



- (b) Zeigen Sie (ohne TR), dass die Graphen von f_k für alle k symmetrisch zur y -Achse sind.

(2 P)

- (c) Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen dem Graphen und der x -Achse für $k = 5$.

„solve()“ ist die einzige TR-Funktion, die hier eingesetzt werden darf.

(5 P)

Grundlagenfach Mathematik: Taschenrechner-Einsatz an der Maturaprüfung

Grundsätzlich gilt: Der Taschenrechner-Einsatz muss sauber dokumentiert sein.

Folgendes muss **ohne Taschenrechner** gemacht werden:

- Lösen linearer Gleichungen
- Umformen von Gleichungen zu quadratischen Gleichungen oder Polynomgleichungen
- Lösen von Gleichungen der Form $a \cdot x^n = b$ oder ähnlicher Gleichungen
- Berechnen der 1. Ableitung
- Abspalten von Potenzen von x und Gleichungen lösen, die sich so auf Gleichungen oben erwähnter Form zurückführen lassen
Bsp: $x^3 + x^2 = 0 \iff x^2(x+1) = 0 \iff x \in \{-1, 0\}$

Hier darf **mit dem Taschenrechner** gearbeitet werden:

- Lösen von Polynomgleichungen, die nicht von der Form $a \cdot x^n = b$ o.ä. sind Bsp:
 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \stackrel{TR}{\iff} x \in \{-1, 1\}$
- Lösen von linearen $n \times n$ Gleichungssystemen mit zwei oder mehr Variablen und Gleichungen
- Berechnen von Skalar- und Vektorprodukten
Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \stackrel{TR}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit der Summenformel
Bsp: $\sum_{k=3}^5 \binom{7}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} \stackrel{TR}{=} \frac{91}{128}$