



Abschlussprüfungen FMS 2009

Grundlagenfach	Mathematik
Abteilung	F3b
Examinator	Michael Kalkhi

Erlaubte Hilfsmittel:

Formelsammlung: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner (nicht programmierbar, kein CAS, nicht grafikfähig)

Prüfungsbestimmungen:

Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
Schreiben Sie mit Kugelschreiber, Füllfederhalter o.ä. (Bleistift ist nur für Skizzen zugelassen).
Die Lösungen müssen vollständig dokumentiert sein, um die volle Punktzahl zu erhalten.
Doppelt gelöste Aufgaben werden gar nicht bewertet.

Notenmassstab: Es sind insgesamt 55 Punkte erreichbar.

Punkte	0 - 2	2.5 - 7	7.5 - 12	12.5 - 17	17.5 - 22	22.5 - 27	27.5 - 32	32.5 - 37	37.5 - 42	42.5 - 47	47.5 - 55
Note	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0

Aufgabe 1 (25 Minuten, 3+2+3=8 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten x auf.

a) $\sqrt{2x+3} = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{4x-2}$

b) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$

c) $a^x \cdot b^x = (a+b)^{x+2}$

Aufgabe 2 (30 Minuten, 2+3+3+4=12 Punkte)

Geben Sie Wahrscheinlichkeiten als Brüche oder als Prozentzahlen an (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

- Sie werfen drei faire Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens eine Eins werfen?
- Sie werfen einen fairen Würfel mehrmals. Wie oft müssen Sie ihn werfen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Eins grösser als 95% ist?
- Sie werfen vier faire Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ein Doppelpaar (zwei verschiedene Augenzahlen kommen je zwei Mal vor, beispielsweise 2mal eine Vier und 2mal eine Fünf) werfen?
- Sie werfen vier faire Würfel. Falls Sie viermal dieselbe Zahl werfen, erhalten Sie 1000 Franken. Falls Sie genau dreimal dieselbe Zahl werfen, erhalten Sie 100 Franken. Sind alle Zahlen verschieden, müssen Sie 50 Franken zahlen. In allen anderen Fällen fliesst kein Geld. Wie gross ist der Erwartungswert dieses Spiels?

Aufgabe 3 (25 Minuten, 3+3+3=9 Punkte)

Im Dreieck $\Delta(ABC)$ kennt man die Seitenlängen $a = 8$ cm, $b = 7$ cm und $c = 6$ cm.

- Berechnen Sie die Dreieckswinkel α , β und γ .
- Wie weit ist der Schwerpunkt S des Dreiecks von der Ecke A entfernt?
- Berechnen Sie den Inkreisradius r des Dreiecks.

Aufgabe 4 (20 Minuten, 2.5+2+2.5=7 Punkte)

Der Wirkstoff einer Schmerztablette wird im menschlichen Körper exponentiell abgebaut. Nimmt ein Patient eine Tablette, die 0.5 g des Wirkstoffes enthält, so befinden sich nach 10 Stunden noch 0.09 g im Körper.

- Berechnen Sie die prozentuale Abnahme pro Stunde.
- Wann ist die Hälfte des Wirkstoffes abgebaut?
- Peter nimmt um 9 Uhr eine Tablette und um 15 Uhr zwei weitere. Um sicher Auto fahren zu können, darf die Wirkstoffkonzentration nicht mehr als 3 mg pro Kilogramm Körpergewicht sein. Darf der 80 kg schwere Peter um 20 Uhr bereits wieder Auto fahren?

Aufgabe 5 (15 Minuten, 5 Punkte)

Die Eltern von Peter zahlen seit der Geburt von Peter an jährlich einen fixen Betrag von 1000 Franken auf ein Ausbildungskonto ein. Ab dem 12. Geburtstag erhöhen sie diesen Betrag auf das Doppelte, d.h. 2000 Franken. Sie rechnen mit einem Jahreszinssatz von 5%. Welchen Betrag hat Peter an seinem 18. Geburtstag, an dem die letzte Einzahlung stattfindet, zur Verfügung?

Machen Sie zu Beginn eine übersichtliche Zeitstrahlskizze.

Aufgabe 6 (25 Minuten, 3+3+3=9 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Eine Parabel mit Öffnungsparameter 2 geht durch die Punkte $P(6/6)$ und $Q(0/30)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel in der Form $y = ax^2 + bx + c$ und ihre Nullstellen.
- b) Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 15$ wird vertikal in y -Richtung verschoben. In welche Richtung („oben“ oder „unten“) und um wie viele Einheiten muss sie mindestens verschoben werden, dass sie keine Nullstellen mehr hat?
- c) Die gleiche Parabel wie bei b), d.h. $y = x^2 - 8x + 15$, wird an der Horizontalen $y = 1$ gespiegelt. Wie lautet die Gleichung der Bildparabel?

Aufgabe 7 (10 Minuten, 2+3=5 Punkte)

- a) Die 16 Schülerinnen der F3b haben mündliche Deutsch-Prüfungen. Herr Franz darf die Reihenfolge bestimmen. Wie viele verschiedene Reihenfolgen hat Herr Franz zur Auswahl?
- b) Die 16 Schülerinnen der F3b organisieren zum Abschluss einen Grill-Abend. Jemand muss Holz organisieren, drei kaufen zusammen die Getränke ein, vier organisieren zusammen die Salate, drei organisieren zusammen Besteck. Wie viele verschiedene Organisationskomitees sind möglich?

Lösung 1 (3+2+3=8 Punkte) a) isolieren und quadrieren: $2x + 3 = 4 + 2\sqrt{4x - 2} + x - \frac{1}{2}$

zusammenfassen, isolieren, quadrieren: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4(4x - 2)$ bzw. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 16x - 8$

$x^2 - 17x + 8.25 = 0$, Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 33}}{2}$; $x_1 = 16.5$; $x_2 = 0.5$

Probe: $x_1 = 16.5, x_2 = 0.5$

Vorgehen (2mal isolieren und quadrieren): 0.5 P

binomische Formeln bedacht und richtig angewandt: 1 P

Richtig zusammengefasst: 0.5 P

Verwendung Lösungsformel und Antwort: 1 P

falls Probe vergessen: -0.5 P

b) faktorisieren oder mit Substitution: $(x^2 - 6)(x^2 + 2) = 0$. $x = \sqrt{6}; x = -\sqrt{6}$.

Idee (Faktorisieren oder Substitution): 1 P

Lösungen inkl. Herleitung: 1 P

c) Logarithmieren: $x(\log a + \log b - \log(a + b)) = 2 \log(a + b)$.

Auflösen: $x = \frac{2 \log(a + b)}{\log a + \log b - \log(a + b)}$

Idee (Logarithmieren): 0.5 P

Logarithmusgesetze richtig verwendet: 1 P

Lösen der Gleichung: 1.5 P

Lösung 2 (2+3+3+4=12 Punkte) a) Gegenereignis. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 42.13\%$

Vorgehen (Gegenereignis anschauen): 1 P

Rechnung und Lösung: 1 P

b) $P(n\text{-mal keine Eins}) \leq 0.05$:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.05 \Rightarrow n \geq \frac{\log 0.05}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 16.43$$

d.h. $\boxed{\text{mindestens 17mal}}$.

Vorgehen (Umformulierung): 1 P

Ansetzen der Ungleichung: 0.5 P

Lösen der Gleichung: 1 P

Antwort: 0.5 P

c) $\underbrace{6 \cdot 5}_{\text{Anz. Paare}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Anz. Rf}} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 13.89$

Vorgehen (einen Fall mit Anzahl multiplizieren): 0.5 P

Anzahl Paare: 1 P

Wk eines Falles: 1 P

Rechnung und Antwort: 0.5 P

d) $E = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot 1000 + 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 100 + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot (-50) = \boxed{0}$ Franken pro Spiel.

Vorgehen Erwartungswert (Summe bilden): 0.5 P

Wk der Ereignisse: je 1 P

Antwort: 0.5 P

Lösung 3 (3+3+3=9 Punkte) a) Mit dem Kosinussatz:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \quad (Z)$$

Man erhält: $\alpha \approx 75.5225^\circ; \beta \approx 57.9100^\circ; \gamma \approx 46.5675^\circ$

Kongruenzsatz bzw. Kosinussatz verwenden: 1 P

erster Winkel: 1 P

zweiter und dritter Winkel: je 0.5 P

- b) $\Delta(ABM_a)$ oder $\Delta(ACM_a)$ anschauen (Kongruenzsatz: SWS) und verwenden, dass S bei 2/3 der Länge von s_a liegt.

Variante 1:

$$\overline{AS} = \frac{2}{3}s_a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{c^2 + \frac{1}{4}a^2 - ac \cos \beta} \approx \boxed{4.1767 \text{ cm}}$$

Variante 2 analog mit b statt c und γ statt β .

Vorgehen (richtiges Dreieck): 1 P

Schwerpunkt bei 2/3 der Schwerlinie: 0.5 P

Term / Rechnung für \overline{AS} : 1 P

Antwort: 0.5 P

- c) siehe Skizze. Idee: \overline{AW} im Dreieck $\Delta(ABW)$ (Kongruenzsatz WSW). Dann $\bar{r} = \overline{WH}$ im rechtwinkligen Dreieck $\Delta(AWH)$. Die anderen Lösungswege ergeben sich analog.

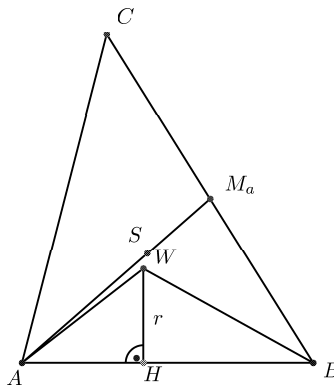
$$\overline{AW} = \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) \cdot \frac{c}{\sin \left(180 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right)} \approx 3.16227766$$

$$r = \overline{AW} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \approx \boxed{1.9365 \text{ cm}}$$

Richtiges Dreieck anschauen + Lösungsweg: 1.5 P

\overline{AW} berechnen: 1 P

Antwort: 0.5 P



Lösung 4 (2.5+2+2.5=7 Punkte) a) $0.09 = 0.5 \cdot b^{10} \Rightarrow b = \sqrt[10]{\frac{0.09}{0.5}} \approx 0.8424$, d.h. $\boxed{-15.76\%}$ pro Stunde.

Ansatz / Gleichung für b: 1 P

b berechnen: 1 P

als Prozentzahl: 0.5 P

- b) $0.5 = b^t \Rightarrow t = \frac{\log 0.5}{\log b} \approx \boxed{4.04}$ Stunden.

Ansatz / Gleichung für t: 1 P

t berechnen und Antwort: 1 P

- c) Um 20 Uhr ist die übrig gebliebene Wirkstoffmenge: $0.5 \cdot b^{11} + 2 \cdot 0.5 \cdot b^5 \approx 0.50001 \text{ g}$
Dies entspricht bei 80 kg Körpergewicht 6.25 mg pro kg. Somit darf Peter um 20 Uhr noch nicht Auto fahren.

übrig gebliebene Wirkstoffmenge berechnet: 1 P

Umrechnung auf 1 kg: 1 P

Antwort: 0.5 P

Lösung 5 (5 Punkte) Das Vermögen beträgt:

$$K_1 = 1000 \cdot 1.05^{18} + 1000 \cdot 1.05^{17} + \dots + 1000 \cdot 1.05^7 = 1000 \cdot 1.05^7 \cdot \frac{1.05^{12} - 1}{1.05 - 1} \approx 22'397$$

$$K_2 = 2000 \cdot 1.05^6 + 2000 \cdot 1.05^5 + \dots + 2000 = 2000 \cdot \frac{1.05^7 - 1}{1.05 - 1} \approx 16284.02$$

Somit hat er schliesslich 38'681.01 Franken zur Verfügung.

Situationsanalyse (Zeitstrahlskizze): 1 P

Aufteilen in zwei Kapitalien oder zwei Zeitpunkte: 1 P

Richtige Terme für Kapitalien und Formel für GF: 2 P

Rechnungen + Antwort: 1 P

Lösung 6 (3+3+3=9 Punkte) a) $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$ hat die Nullstellen $x = 5$ und $x = 3$.

Verarbeitung der drei Informationen: je 0.5 P

Funktionsterm: 1 P

Nullstellen: 0.5 P

b) Scheitelpunkt $S(4 | -1)$, Parabel ist nach oben geöffnet.

Verschiebung um mehr als 1 Einheiten nach oben.

Idee (Scheitelpunkt berechnen und Öffnung berücksichtigen): 1 P

Berechnung Scheitelpunkt, Angabe Öffnung: je 0.5 P

Antwort (1 Einheit und „mehr als“): 1 P

c) neuer Scheitelpunkt $S(4/3)$, neuer Öffnungsparameter $a = -1$. Somit $y = -(x - 4)^2 + 3 =$
 $-x^2 + 8x - 13$.

Idee (neuer Scheitelpunkt + neue Öffnung betrachten): 1 P

neuer Scheitelpunkt berechnen + neue Öffnung berechnen: je 0.5 P

Ansatz für neue Gleichung: 0.5 P

Funktionsterm: 0.5 P

Lösung 7 (2+3=5 Punkte) a) $16! \approx 2.09 \cdot 10^{13}$

Idee: 1 P

Rechnung + Resultat: je 0.5

b) $16 \cdot \binom{15}{3} \binom{12}{4} \binom{8}{5} =$ $201'801'600$

Idee: 1 P

Term: 1.5 P

Antwort: 0.5 P

Total: 55 Punkte. Note = $\frac{\text{Punkte}}{50} \cdot 5 + 1$

Punkte	0.0	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6