



Maturitätsprüfungen 2009

Grundlagenfach	Mathematik
Abteilungen	G4ABCDE
Examinatoren	M. Brunisholz, M. Kalkhi, D. Koch

Erlaubte Hilfsmittel:

Formelsammlung: Fundamentum Mathematik und Physik
Für den zweiten Teil: Taschenrechner TI-89 oder TI-89 Titanium
ohne gespeicherte Programme

Prüfungsbestimmungen:

Sie erhalten den Taschenrechner, sobald sie den ersten Teil abgegeben haben.

Schreiben Sie mit Kugelschreiber, Füllfeder o.ä., Bleistift ist nur für Graphen und Skizzen zugelassen.

Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

Die Lösungen müssen vollständig dokumentiert sein, um die volle Punktzahl zu erhalten.

Programme, die Sie zur Lösung einer Aufgabe selber schreiben, müssen in der entsprechenden Aufgabe dokumentiert sein.

Doppelt gelöste Aufgaben werden gar nicht gewertet.

Notenmassstab:

Es sind insgesamt 87 Punkte erreichbar.

Punkte	0	0.5	9	17.5	26	34.5	43	51.5	60	68.5	77
		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		8.5	17	25.5	34	42.5	51	59.5	68	76.5	87
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Ohne Taschenrechner

Aufgabe 1 *Ableitungen* 4 Punkte

Berechnen Sie jeweils die 1. Ableitung folgender Funktionen:

(a) $K(x) = \frac{1}{10} \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 125 \cdot x + 900$ (1 P)

(b) $h(t) = e^{-2t} \cdot \sin(3 \cdot t + \frac{\pi}{4})$ (2 P)

(c) $n(k) = s^a$ (1 P)

Aufgabe 2 *Integrale* 9 Punkte

Berechnen Sie:

(a) $\int 4 \cdot \sin(2 \cdot t - \frac{\pi}{6}) dt$ (2 P)

(b) $\int_0^4 e^{-\frac{h}{8}} dh$ (2 P)

(c) Den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen von $g(x) = -x^2 + 3 \cdot x$ und $h(x) = x^2$.
Fertigen Sie eine geeignete Skizze der Situation an. (5 P)

Aufgabe 3 *Kurvendiskussion* 16 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(a) Diskutieren Sie die Funktion. Verlangt sind Definitionsbereich, allfällige Symmetrien, Nullstellen, Asymptoten und Extrempunkte. (9 P)

(b) Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1)$ eine Stammfunktion von f ist. (2 P)

(c) Der Graph von $f(x)$ schliesst zusammen mit der positiven x -Achse und der Vertikalen $x = \sqrt{3}$ im 1. Quadranten ein Flächenstück A ein. Das Flächenstück A soll von der Geraden $x = d$ halbiert werden.
Wie ist d zu wählen? (5 P)

Aufgabe 4 *Maximales Integral* 5 Punkte

Für welches positive t wird $\int_{2t}^{3t} e^{t-x} dx$ maximal?

Mit Taschenrechner

**Der Taschenrechner darf unbegrenzt benutzt werden.
Die Lösungswege müssen jedoch klar ersichtlich sein!**

Aufgabe 5 *Nicole und Lewis* 15 Punkte

Nicole steht im Punkt $P(1|1)$. Der Graph von $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - x^2$ beschreibt die Fahrbahn eines Autos in dem Lewis sitzt.

- Es ist dunkel und Lewis fährt mit Scheinwerfern. Bei welchem Punkt des Graphen befindet sich Lewis, wenn er Nicole in der Mitte des Scheinwerferlichts sehen kann? (4 P)
- Nicole will einsteigen. An welcher Stelle befindet sich Lewis möglichst nahe bei Nicole? Geben Sie diesen minimalen Abstand an. (5 P)
- Nicole will nicht laufen. Lewis ist so ein Schatz und holt sie ab. Er verlässt die Strasse im Nullpunkt, holt Nicole im Punkt P ab und fährt an der Stelle $x = 5$ wieder auf die ursprüngliche Strasse. In den Übergängen soll dabei kein Knick entstehen.
Geben Sie für die neue Fahrbahn zwischen $x = 0$ und $x = 5$ die Polynomfunktion kleinsten Grades an, deren Graph alle genannten Eigenschaften erfüllt! (6 P)

Aufgabe 6 *Geraden und Ebene* 7 Punkte

Betrachten Sie die Geraden $g: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} k \\ k^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$, und die Ebene $E: 2x + y - 4z - 7 = 0$.

- Für welche Werte von k liegt g parallel zur Ebene E ? (4 P)
- Zeigen Sie, dass die Gerade g für kein k orthogonal zu E ist. (3 P)

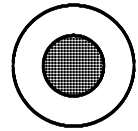
Aufgabe 7 *Punkte im Raum* 19 Punkte

Betrachten Sie die drei Punkte $P(2|4|-3)$, $Q(4|5|-4)$ und $R(2|3|1)$.

- Bestimmen Sie S so, dass $PQRS$ ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie die Parallelogrammwinkel. (4 P)
- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene bezüglich welcher P und R spiegelbildlich liegen. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade durch P und Q diese Ebene? (5 P)
- Die drei Punkte P , Q und R sind die Ecken der Grundfläche einer Pyramiden mit Spitze T . Die Höhe durch T schneidet die Grundfläche im Punkt $H(-4|1|z)$. Das Pyramidenvolumen beträgt $V = 38.5$. Bestimmen Sie die Spitze T . (10 P)

Aufgabe 8*Armbrustschiessen*

16 Punkte



Der Armbrustschütze Wilhelm trifft auf seiner Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% den inneren Kreis, mit einer Wahrscheinlichkeit 25% den äusseren Kreis. Die Wahrscheinlichkeit, dass er die Scheibe gar nicht trifft, beträgt 5%.

- (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Wilhelm in 10 Versuchen
- (a1) nie den äusseren Kreis trifft, (1 P)
 - (a2) in den ersten zwei Versuchen die Scheibe verfehlt, sie danach aber immer trifft, (1 P)
 - (a3) genau 7 Mal in die Mitte trifft, (2 P)
 - (a4) höchstens 7 Mal in die Mitte trifft? (2 P)
- (b) Wie oft müsste Wilhelm schiessen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von über 90% mindestens einmal die Scheibe verfehlt? (3 P)
Hinweis: Probieren gilt nicht als gültiger Lösungsweg!
- (c) Wilhelm darf drei Schüsse abgeben. Hermann zahlt ihm pro Treffer in den inneren Kreis zwei Franken und pro Treffer in den äusseren Kreis einen Franken aus.
- (c1) Wilhelm erhält drei Franken ausbezahlt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Scheibe genau einmal verfehlt hat? (4 P)
 - (c2) Welchen Spieleinsatz müsste Hermann (für alle drei Schüsse zusammen) verlangen, um das Spiel fair zu gestalten? (3 P)

Aufgabe 9*Autoferien*

12 Punkte

Je 6 Frauen und Männer fahren gemeinsam mit drei Autos in den Urlaub. Ein Auto besitzt zwei, eines vier und eines sechs Sitzplätze.

- (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Personen den Autos (nicht den Sitzplätzen!) zuzuteilen, wenn
- (a1) sonst keine Bedingung mehr erfüllt werden muss, (2 P)
 - (a2) in jedem Auto gleich viele Frauen wie Männer sitzen sollen, (2 P)
 - (a3) in jedem Auto entweder nur Frauen oder nur Männer sitzen sollen, (2 P)
 - (a4) Köbi und Röbi im gleichen Auto sitzen wollen? (2 P)
- (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Zulosung der Sitzplätze in jedem Auto mindestens eine Frau sitzt? (4 P)