Abschlussprüfung FMS 2007 Name:

Die Resultate sind als gewöhnliche (und gekürzte) Brüche, als Wurzeln oder als Dezimalbrüche (vernünftig gerundet, normalerweise auf vier zählende Ziffern) anzugeben.

Bleistift ist nur für Graphen und Skizzen erlaubt.

Geben Sie dieses Aufgabenblatt ebenfalls ab.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme* 8 Punkte

Geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $\sqrt{x^2+9} = 2x-3$

(b) $\left.\begin{array}{rcl} 2x - y^2 + 7y & = & 8 \\ x - 2y^2 + 2y & = & -5 \end{array}\right|$

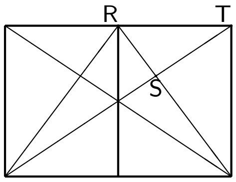
(c) $\log_9(x+20) = 2$

(d) $0.87^{3x} > 0.4$

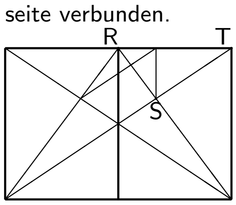
Aufgabe 2 *Strahlensätze, Ähnlichkeit, Trigonometrie* 9 Punkte

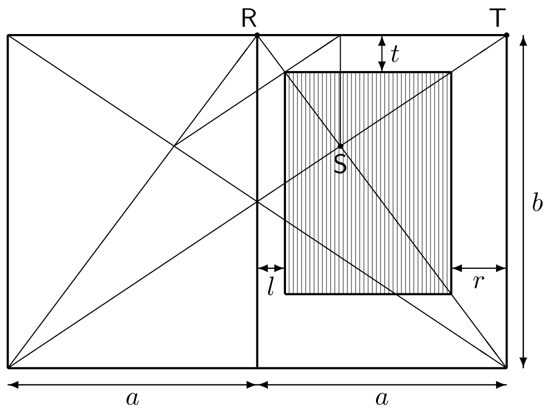
Als Satzspiegel wird in der Typografie die Nutzfläche auf der Seite eines Buches, einer Zeitschrift oder anderen Druckwerken bezeichnet (schraffierte Fläche in der Abbildung ganz rechts). Eine Renaissance-Satzspiegelkonstruktion wird nachfolgend beschrieben.

Zunächst werden die Diagonalen der Doppelseite und der beiden Halbseiten gezogen.



Dann wird von S senkrecht nach oben eine Gerade gezogen und dieser neue Punkt mit dem Schnittpunkt der anderen Halbseite verbunden.





(a) Die Längen a und b seien bekannt.
Bestimmen Sie mit Hilfe von Strahlensätzen (ohne Trigonometrie) die Verhältnisse $l : t$ und $l : r$.
(Beschreiben Sie Ihre Überlegungen genau.) (2 P)

(b) Bestimmen Sie aus $a = 30\,\text{cm}$ und $b = 40\,\text{cm}$ den Winkel $\sphericalangle RST$ (2 P), die Länge von $\overline{ST}$ (2 P) und den Inhalt der schraffierten Fläche (3 P).
(Hier dürfen trigonometrische Funktionen benutzt werden. Sie dürfen auf diesem Blatt in die Skizze zeichnen.)

Aufgabe 3 *Quadratische Funktionen und Gleichungen* 3 Punkte

Ein Seilbahnbetreiber verlangt für eine Fahrt 10 Franken. Im Schnitt zählt er 400 Fahrten pro Tag.
Seine Tochter hat die Fahrgäste befragt und kommt zum Ergebnis, dass pro Reduktion des Fahrpreises um 10 Rappen die Anzahl Fahrten pro Tag um 20 zunehmen würde.
Sie geht davon aus, dass ihr Modell für Fahrpreise zwischen 5 Franken und 15 Franken stimmt.
Welchen Fahrpreis soll sie ihrem Vater vorschlagen, damit seine Einnahmen möglichst gross werden?

Wichtig: Die Aufgabe ist mit Hilfe einer Rechnung zu lösen. Pröbeln zählt nicht als Lösungsweg.

Aufgabe 4 *Beschreibende Statistik* 3 Punkte

Gegeben ist folgender Datensatz:

99.3	125	106.9	105.7	126.1	119.7	86.2	117.1	133.8	122.1
136.9	124	102.4	113.7	127	131.7	123.2	114.6	98.4	

(a) Erstellen Sie ein sinnvolles Stängel-Blatt-Diagramm. (2 P)

(b) Welches ist der grösste Vorteil des Stängel-Blatt-Diagramms gegenüber dem Histogramm? (1 P)

Bitte wenden.

Aufgabe 5 *Folgen und Reihen* 3 Punkte

Eine neuentwickelte Rutschbahn wird getestet. Dabei wird eine Puppe mit Gewichten gefüllt und als „Testperson“ verwendet. Beim ersten Durchgang wiegt die Puppe 40 kg. Bei jedem weiteren Durchgang werden der Puppe 500 g an Gewicht hinzugefügt. Das Hinaufschleppen der Puppe wird von einem Gewichtheber erledigt und bei jedem Durchgang nach Puppengewicht abgerechnet. Pro Kilogramm erhält der Gewichtheber 50 Rappen.

(a) Welches Gewicht wird im 120. Durchgang verwendet werden? (1 P)

(b) Wieviele Durchgänge sind notwendig, wenn die Puppe beim letzen Durchgang 120 kg wiegen soll? (1 P)

(c) Mit welchen Einnahmen kann der Gewichtheber rechnen, wenn insgesamt 200 Durchgänge geplant sind? (1 P)

Aufgabe 6 *Exponentialfunktionen, Logarithmen, Folgen und Reihen* 8 Punkte

Charlotte (geboren am 29.2.1960) gewinnt in einer Lotterie 500'000 Franken! Sie legt das Geld am 29. Februar 2008 auf einer Bank zu einem Jahreszins von 3.5% an, um sich dann ab 2012 alle vier Jahre am 29. Februar einen schönen Geldbetrag zum Geburtstag auszahlen zu lassen. Dies soll zum letzten Mal im Jahr 2044 geschehen.
Ihre Zwillingsschwester Magdalena zahlte in den Jahren 1990 bis 2007 stets Ende Februar 20'000 Franken auf ein separates Konto ein – ebenfalls zu einem Jahreszins von 3.5%.

(a) Welcher Betrag liegt Ende Februar 2008 auf Magdalenas Konto? (2 P)

(b) Welchen (immer gleichen) Betrag kann Charlotte sich in den Jahren 2012, 2016, ..., 2044 auszahlen lassen? (2 P)

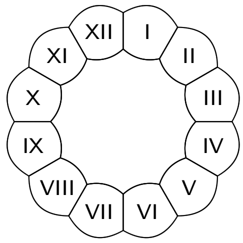
(c) Charlotte weiss, dass sie für 1000 Fr. in einem Jahr nicht mehr dasselbe erhält wie für 1000 Fr. heute. Sie nimmt eine Jahresteuerung von 1.5% an.

- (c1) Um wie viel (in Prozent) muss sich ein Betrag innert vier Jahren vergrössern, damit seine Kaufkraft erhalten bleibt (d.h. wie viel beträgt die Teuerung innert vier Jahren)? (1 P)
- (c2) Wie lange dauert es, bis sich die Kaufkraft halbiert hat (man also doppelt so viel bezahlen muss)? (1 P)
- (c3) Welchen Betrag erhält sie im Jahr 2012, wenn sie sich in den Jahren 2012, 2016, ..., 2044 jeweils Beträge mit gleicher Kaufkraft auszahlen lassen will? (2 P)

Aufgabe 7 *Kombinatorik* 1 Punkt

In einer Klasse bestehend aus 12 Mädchen und 8 Knaben soll ein Schulreisekomitee bestehend aus 3 Mädchen und 2 Knaben gegründet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, das Komitee zu bilden?

Aufgabe 8 *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung* 7 Punkte



(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei identische Könige in einem zwölfteiligen Dreikönigskuchen mit nummerierten Teilen (siehe Abbildung) zu verstecken, wenn

- (a1) die beiden Könige in verschiedenen Teilen sein müssen,
- (a2) die beiden Könige auch im selben Teil sein dürfen,
- (a3) die beiden Könige in benachbarten Teilen sein müssen,
- (a4) zwischen den beiden Königen mindestens drei leere Teile sein müssen?

(je 1 P)

(b) Die Könige seien in verschiedenen Teilen versteckt. Max darf zwei Stücke auswählen. Findet er beide Könige, so erhält er 25 Franken. Findet er genau einen König, so erhält er 7 Franken. Findet er keinen König, so geht er leer aus. Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair? (3 P)

Aufgabe 9 *Wahrscheinlichkeitsrechnung* 4 Punkte

Ein Stürmer verwandelt mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{3}$ einen Elfmeter.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei fünf Strafstössen nie trifft? (1 P)

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei fünf Strafstössen mindestens 2 verwandelt? (1 P)

(c) Wie viele Elfmeter müsste er schiessen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal **nicht** trifft, über 99.99% ist?
Wichtig: Die Aufgabe ist mit Hilfe einer Rechnung zu lösen. Pröbeln zählt nicht als Lösungsweg. (2 P)

Total: 46 Punkte

Abschlussprüfung FMS 2007 Lösungen

Aufgabe 1 *Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme* 8 Punkte

(a) $L = \{4\}$

(b) $(x, y) \in \{(-1, 2), (19, -3)\}$

(c) $L = \{61\}$

(d) $L = \{x \in \mathbb{R} | x < 2.193\}$

Aufgabe 2 *Strahlensätze, Ähnlichkeit, Trigonometrie* 9 Punkte

(a) Strahlensatz mit Zentrum R: $l : t = a : b \iff l = \frac{a \cdot t}{b}$
Strahlensatz mit Zentrum T: $r : t = 2a : b \iff r = \frac{2a \cdot t}{b}$
Somit: $l : r = \frac{\frac{a \cdot t}{b}}{\frac{2a \cdot t}{b}} = \frac{a \cdot t}{2a \cdot t} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 1 : 2$

(b) $\tan(\sphericalangle RTS) = \frac{20}{30} \Rightarrow \sphericalangle RTS = 33.69°$
$\tan(\sphericalangle SRT) = \frac{40}{30} \Rightarrow \sphericalangle SRT = 53.13°$
$\Rightarrow \sphericalangle RST = 180 - \sphericalangle RTS - \sphericalangle SRT = 93.18°$
$\overline{ST} = \frac{\sin(\sphericalangle SRT)}{\sin(\sphericalangle RST)} \cdot \overline{RT} = 24.04\,\text{cm}$

$t = 4.\overline{4}\,\text{cm}$, $r = 6.\overline{6}\,\text{cm}$, $l = 3.\overline{3}\,\text{cm}$, $u = 8.\overline{8}\,\text{cm}$.
$F = 533.\overline{3}\,\text{cm}^2$

Aufgabe 3 *Quadratische Funktionen und Gleichungen* 3 Punkte

E: Einnahmen in Franken. g: Anzahl Gäste (Fahrten). p: Preis pro Fahrt in Franken.
x: Anzahl Verbilligungsschritte à 10 Rp.

$$\begin{aligned} E &= g \cdot p = (400 - 20x) \cdot (10 - 0.1x) = \ldots = -2x^2 + 160x + 4000 \\ &= -2\left[x^2 - 80x \underbrace{+1600 - 1600}_{=0}\right] + 4000 \\ &= -2\left[(x-40)^2 - 1600\right] + 4000 = -2 \cdot (x-40)^2 + 7200 \end{aligned}$$

Ideal sind 40 Verbilligungsschritte, also ein Fahrpreis von 6 Franken.

Aufgabe 4 *Beschreibende Statistik* 3 Punkte

(a)

13	1.7	3.8	6.9			
12	2.1	3.2	4.0	5.0	6.1	7.0
11	3.7	4.6	7.1	9.7		
10	2.4	5.7	6.9			
9	8.4	9.7				
8	6.2					

(b) Kein Datenverlust (ausser der Reihenfolge). (Jeder Wert ist weiterhin exakt ablesbar.)

Aufgabe 5 *Folgen und Reihen* 3 Punkte

(a) $a_1 = 40\,\text{kg}$, $d = 0.5\,\text{kg}$
$a_{120} = 40\,\text{kg} + 119 \cdot 0.5\,\text{kg} = 99.5\,\text{kg}$

(b) $a_n = 40\,\text{kg} + (n-1) \cdot 0.5\,\text{kg} \stackrel{!}{=} 120\,\text{kg} \iff n = 161$ (Durchgänge)

(c) $p_1 = 20\,\text{Fr.}$, $p_2 = 20.25\,\text{Fr.}$, $p_n = (20 + (n-1) \cdot 0.25)\,\text{Fr.}$.
$p_1 + p_2 + \ldots + p_{200} = \frac{200}{2} \cdot (p_1 + p_{200}) = 8975\,\text{Fr.}$

Aufgabe 6 *Exponentialfunktionen, Logarithmen, Folgen und Reihen* 8 Punkte

(a)

Jahr	Betrag	Anz. Verzinsungen	Betrag Ende Feb. 2008
1990	$20'000$	18	$20'000 \cdot 1.035^{18}$
1991	$20'000$	17	$20'000 \cdot 1.035^{17}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2007	$20'000$	1	$20'000 \cdot 1.035^{1}$

18 Beträge bilden eine GF mit $a_1 = 20'000 \cdot 1.035$ und $q = 1.035$
Summe: $20'000 \cdot 1.035 \cdot \frac{1-1.035^{18}}{1-1.035} = 507'143.61 \approx 507'000.$

(b)

Jahr	Betrag	Anz. Verzinsungen	Betrag Ende Feb. 2008
2012	r	4	$r \cdot \frac{1}{1.035^4}$
2016	r	8	$r \cdot \frac{1}{1.035^8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2044	r	36	$r \cdot \frac{1}{1.035^{36}}$

9 Beträge bilden eine GF mit $a_1 = r \cdot \frac{1}{1.035^4}$ und $q = \frac{1}{1.035^4}$
Summe: $r \cdot \frac{1}{1.035^4} \cdot \frac{1-(\frac{1}{1.035^4})^9}{1-\frac{1}{1.035^4}} \stackrel{!}{=} 500'000 \iff r = 103'864.97.$

(c) (c1) $1.015^4 = 1.06.136$. Er muss sich um 6.136% vergrössern.

(c2) $1.015^n = 2 \iff n \approx 46.56$. Es dauert ca. 46.56 Jahre.

(c3)

Jahr	Betrag	Anz. Verzinsungen	Betrag Ende Feb. 2008
2012	r	4	$r \cdot \frac{1}{1.035^4}$
2016	$r \cdot 1.015^4$	8	$r \cdot 1.015^4 \cdot \frac{1}{1.035^8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2044	$r \cdot 1.015^{32}$	36	$r \cdot 1.015^{32} \cdot \frac{1}{1.035^{36}}$

9 Beträge bilden eine GF mit $a_1 = r \cdot \frac{1}{1.035^4}$ und $q = \frac{1.015^4}{1.035^4}$
Summe: $r \cdot \frac{1}{1.035^4} \cdot \frac{1-(\frac{1.015^4}{1.035^4})^9}{1-\frac{1.015^4}{1.035^4}} \stackrel{!}{=} 500'000 \iff r = 85'368.01.$

Aufgabe 7 *Kombinatorik* 1 Punkt

$\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = 6160$

Aufgabe 8 *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung* 7 Punkte

(a) (a1) $\binom{12}{2} = 66$

(a2) $66 + 12 = 78$

(a3) $\frac{12 \cdot 2}{2!} = 12$

(a4) $\frac{12 \cdot 5}{2!} = 30$

(b) s: Einsatz in Fr.

Max findet	2 Könige	1 König	keinen König
Auszahlung in Fr.:	25	7	0
Gewinn:	$25 - s$	$7 - s$	$-$
Wahrscheinlichkeit:	$\frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66}$	$\frac{2}{12} \cdot \frac{10}{11} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{33}$	

$E(\text{Gewinn in Fr.}) = \frac{1}{66} \cdot (25 - s) + \frac{10}{33} \cdot (7 - s) \stackrel{!}{=} 0 \iff s = 2.5$ Bei einem Einsatz von 2.50 Franken.

Aufgabe 9 *Wahrscheinlichkeitsrechnung* 4 Punkte

(a) $(\frac{1}{3})^5 \approx 0.004115 = 0.4115\%$

(b) $P(\text{genau ein Mal}) = 5 \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.04115.$
$P(\text{mindestens zwei Mal}) = 1 - (P(\text{nie}) + P(\text{genau ein Mal})) \approx 0.9547 = 95.47\%$

(c) n: Anzahl Elfmeter
$P(\text{mindestens einmal nicht}) = 1 - P(\text{immer}) = 1 - (\frac{1}{3})^n > 0.9999 \iff n > 22.72$
Er müsste mindestens 23 Elfmeter schiessen.